Μαθημα 10ο

No. Date 23/3/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Ασκηση 14

Δινονται μοναδιαια $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ τα οποια ανα δυο σχηματιζουν ισες γωνιες. Να βρεθει η γωνια φ αυτων για την οποια τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ γραμμικα ανεξαρτητα / εξαρτημενα ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικα)

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτ. $\Leftrightarrow \lambda\vec{a} + \mu\cdot\vec{b} + \nu\cdot\vec{\gamma} = \vec{0}$ (*) ($\Leftrightarrow (\lambda,\mu,\nu) \neq (0,0,0)$)

Μοναδιαια αρα $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{\gamma}| = 1$

$(*)\cdot\vec{a} \longrightarrow \lambda\vec{a}\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{b}\cdot\vec{a} + \nu\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \lambda|\vec{a}|^2 + \mu\,\vec{b}\cdot\vec{a} + \nu\,\vec{\gamma}\cdot\vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda\cdot 1 + \mu|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{b},\vec{a}) + \nu\cdot|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{\gamma},\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda + \mu\cdot\cos\varphi + \nu\cdot\cos\varphi = 0$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{b}\cdot\vec{a}) &= \vec{a}\cdot\vec{b} = \cancel{|\vec{a}|}^{1}\cdot\cancel{|\vec{b}|}^{1}\cdot\cos\cancel{(\vec{a},\vec{b})}^{\varphi} = \cos\varphi\\ (\vec{\gamma}\cdot\vec{a}) &= \vec{a}\cdot\vec{\gamma} = \dots = \cos\varphi\\ (\vec{\gamma}\cdot\vec{b}) &= \vec{b}\cdot\vec{\gamma} = \dots = \cos\varphi\end{aligned}\right\}\text{Υποθεση}$$

$(*)\cdot\vec{b} \longrightarrow \lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \mu\cdot\vec{b}\cdot\vec{b} + \nu\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \lambda\cdot\cos\varphi + \mu + \nu\cdot\cos\varphi = 0$

$(*)\cdot\vec{\gamma} \longrightarrow \lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{\gamma} + \mu\cdot\vec{b}\cdot\vec{\gamma} + \nu\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \lambda\cdot\cos\varphi + \mu\cos\varphi + \nu = 0$

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ Γ.Ε $\Leftrightarrow \det = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\xleftrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1+2\cos\varphi & 1+2\cos\varphi & 1+2\cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\iff (1+2\cos\varphi)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \cos\varphi\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \cos\varphi\Gamma_1}{\iff}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} \cdot (1+2\cos\varphi) = 0 \iff$$

$(1+2\cos\varphi)(1\cdot(1-\cos\varphi)\cdot(1-\cos\varphi)) = 0 \iff$

$(1+2\cos\varphi)(1-\cos\varphi)^2 = 0 \iff \cos\varphi = 1$ ή $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$

$\iff \varphi = 0$ ή $\varphi = 120^\circ \iff \varphi = 120^\circ$

{ Γ.Ε διανυσματα σημαινει βρισκονται στο ιδιο επιπεδο (συνεπιπεδα) }

{ (*) Ανω τριγωνικος πινακας αρα η οριζουσα ειναι το γινομενο των στοιχειων της διαγωνιου }

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ Γ.Ε $\iff$ ειναι συνεπιπεδα και ανα δυο ισες γωνιες

γωνια $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ = γωνια $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ = γωνια $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ $\Rightarrow 360^\circ$ σχηματιζουν $\Rightarrow$ η φ ειναι $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

(*) Η γωνια μου ειναι 120° και οχι 0° γιατι οταν οριζω γωνια δυο διανυσματων την οριζω απο μηδεν (οχι μηδεν ομως) μεχρι π (οχι π ομως) και επιπλεον τα θελω μη συγγραμικά (παραλληλα)

No. Date

ΑΣΚΗΣΗ 15

Εστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Εστω $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$ και $\langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle = 0$

Να βρεθει διανυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{\gamma}$ και $\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \lambda$.

Αφου γινει επαληθευση, να γινει εφαρμογη για $\vec{a} = (1,2,1)$

$\vec{b} = (-1,4,2)$ $\vec{\gamma} = (3,1,-5)$, $\lambda = 5$

$$\vec{a} \times \vec{u} = \vec{\gamma} \xrightarrow[\text{(αριστερα)}]{\times \vec{b}} \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{u}) = \vec{b} \times \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{b} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} = \vec{b} \times \vec{\gamma}$$

$$\xrightarrow{\text{Υποθ.}} \lambda \cdot \vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} = \vec{b} \times \vec{\gamma} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma} = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u}$$

$$\xrightarrow{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \neq 0} \vec{u} = \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

Κανω επαληθευση

- $$\vec{a} \times \vec{u} = \vec{a} \times \left(\frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{\text{αριθμος}}} \right) = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left(\vec{a} \times (\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left(\lambda \cdot \cancelto{0}{(\vec{a} \times \vec{a})} - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \right) = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left(- \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left(- \left(\cancelto{0}{(\vec{a} \cdot \vec{\gamma})} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{\gamma} \right) \right) = \frac{1}{\cancel{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}} \cancel{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\gamma}$$

- $$\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \vec{b} \cdot \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \left(\vec{b} \cdot (\lambda \vec{a}) - \cancelto{0}{\underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma})}_{\text{μεικτο γινομενο}}} \right) =$$

αρα οριζουσα με δυο ιδιες γραμμες

$$= \frac{1}{\cancel{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}} \cdot \lambda \cdot \cancel{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \lambda$$

Εφαρμογη

$e_1 \to (1,0,0)$, $e_2 \to (0,1,0)$, $e_3 \to (0,0,1)$

$$\vec{b}\times\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \dots = (-22, 1, -13)$$

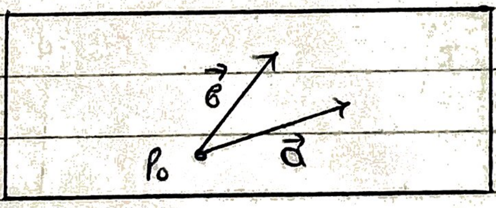
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \dots = 9$

Αρα έχουμε: $\vec{u} = \dfrac{5(1,2,1) - (-22,1,-13)}{9} = (3,1,2)$

Κεφαλαιο 2º
Επιπεδο

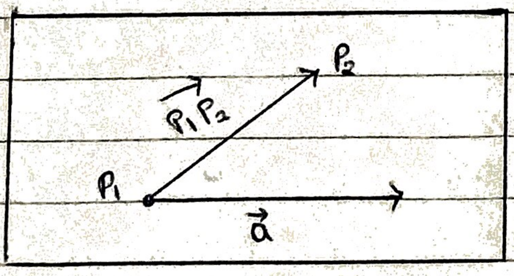
Προσδιορισμος Επιπεδου (π)

(i) Ενα σημειο και δυο διανυσματα (μη συγγραμμικά) και παραλληλα προς το (π)



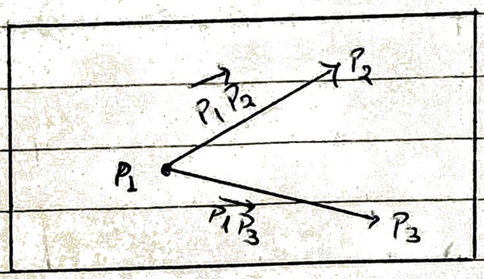
⊕ Αυξανονται τα σημεια, μειωνονται τα διανυσματα

(ii) δυο σημεια του επιπεδου (π) και ενα διανυσμα να είναι παραλληλο προς το (π) και μη συγγραμμικο με το διανυσμα που οριζουν τα δυο σημεια



→ Αναγεται παλι στο (i)

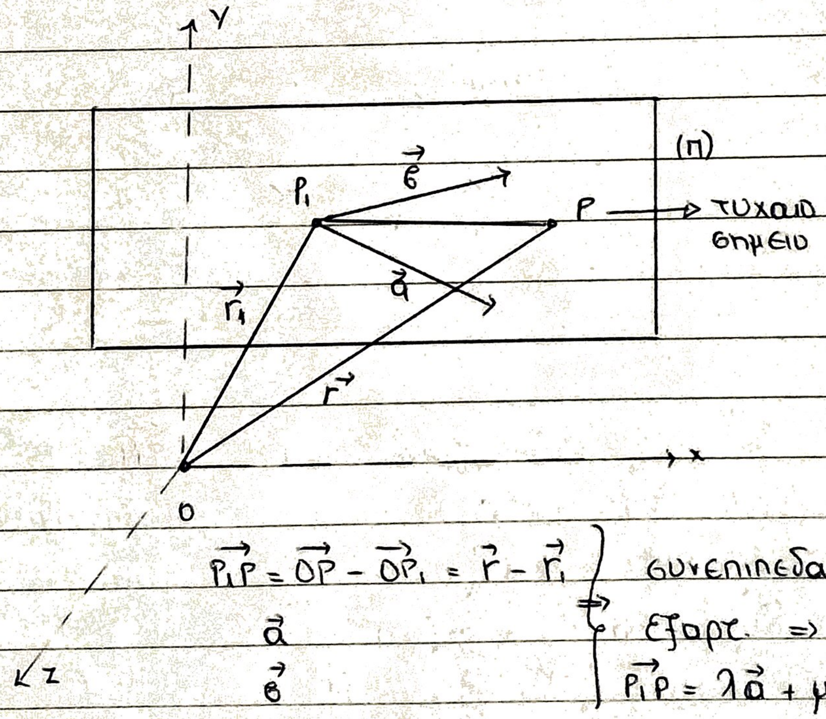
(iii) τρια σημεια <u>ΜΗ</u> συνευθειακα



(π) Τα θελω μη συνευθειακα για να εχω τη μη συγγραμμικοτητα των διανυσματων που μας δινονται

(iv) ενα σημειο του (π) και ενα διανυσμα καθετο στο (π)

Συνεπιπεδα $\Rightarrow \exists$ σχεση γραμ. εξαρτησης $\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
$\vec{P_1P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$



$\vec{P_1P} = \vec{OP} - \vec{OP_1} = \vec{r} - \vec{r_1}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\Rightarrow$ συνεπιπεδα $\Rightarrow$ υπαρχει σχεση γραμ εξαρτ. $\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
$\vec{P_1P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r_1} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*) $\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ διανυσματικη εξισωση του (π) που περιεχει τα μη συγγραμμικα $\vec{a}, \vec{b}$ που διερχεται απο το P_1

$\vec{r}$: διανυσμα θεσης τυχαιου σημειου στο επιπεδο

No. Date

αν $\vec{r}=(x,y,z)$
$\vec{r}_1=(x_0,y_0,z_0)$
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$
$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\xRightarrow{(*)}$ $(\Sigma)\begin{cases} x=x_0+\lambda\cdot a_1+\mu\cdot b_1 \\ y=y_0+\lambda\cdot a_2+\mu\cdot b_2 \\ z=z_0+\lambda\cdot a_3+\mu b_3 \end{cases} \Rightarrow$

Παραμετρικες εξισωσεις
του επιπεδου (π)

πραξεις $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

Προφανως
αφορα 3 συνεπιπεδα διανυσματα με μεικτο γινομενο μηδεν

Αναλυτικη εξισωση
του επιπεδου (π)

πραξεις $\Rightarrow$ $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ $\{\mu\epsilon\ (A,B,\Gamma)=(0,0,0)\}$

Εξισωση επιπεδου

Παρατηρηση
(1) Για να εχει λυση το (Σ) πρεπει μια εκ των 2x2 οριζουσων να ειναι $\neq 0$ ομως $\vec{a}$, $\vec{b}$ μη συγγραμικα που αυτο μας λεει οτι $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\,|\ \ |\ ,\ |\ \ |\ ,\ |\ \ |\,\right)\neq\vec{0}$

οριζουσες οι 2x2 του (Σ)

Αρα το (Σ) εχει λυση

Παρατηρούμε ότι

$\vec{P_1P} = (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\vec{P_1P}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ — μεικτό γινόμενο

Παράδειγμα

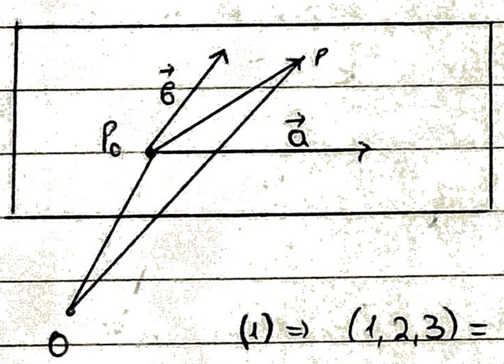
Να βρεθούν οι "διάφορες" εξισώσεις του επιπέδου (π), αν αυτό διέρχεται από σημείο $P_0(1,2,3)$ και είναι παράλληλο προς τα $\vec{a}=(1,1,1)$ και $\vec{b}=(1,-1,1)$

Ελέγχουμε ότι $\vec{a}, \vec{b}$ γραμμ. ανεξάρτητα (μη-συγγραμμικότητα)

$$\lambda(1,1,1)+\mu(1,-1,1)=(0,0,0) \Rightarrow (\lambda+\mu,\ \lambda-\mu,\ \lambda+\mu)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda=\mu=0$$

Συνεπώς ορίζεται επίπεδο π



Διανυσματική Εξίσωση του (π)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{b} \quad (1)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{OP_0} = (1-0,\ 2-0,\ 3-0) = (1,2,3)$$

$$(1) \Rightarrow (1,2,3) = \lambda(1,1,1) + \mu(1,-1,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Παραμετρικές εξισώσεις του (π)

$$\vec{r}=(x,y,z) \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda - \mu \\ z = 3 + \lambda + \mu \end{cases}$$

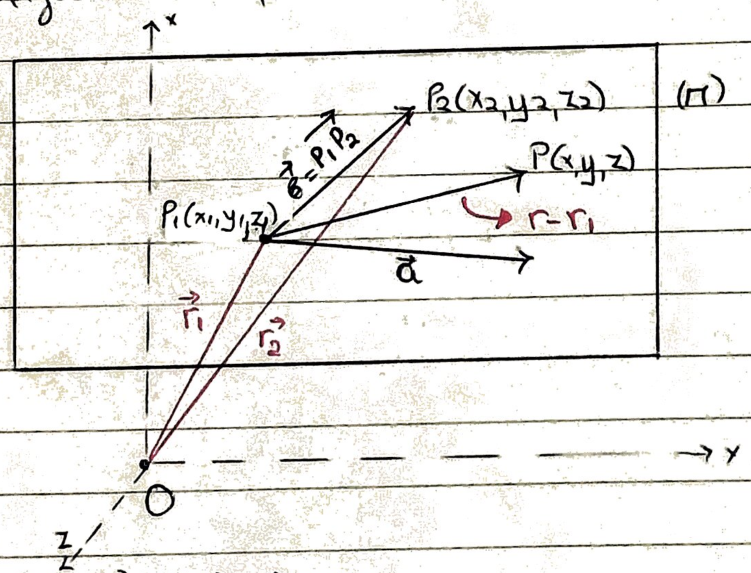
$$\quad\ \ \downarrow P_0 \quad \downarrow \vec{a} \quad \downarrow \vec{b}$$

Αναλυτικη εξισωση επιπεδου (π)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{πραξεις} \ldots\ldots \Rightarrow$$

$x - z + 2 = 0$

(ii) Επιπεδο (π) οριζομενο απο δυο σημεια και ενα διανυσμα παραλληλο στο (π) και μη συγγραμικο με το διανυσμα που οριζουν τα σημεια



Ορθοκανονικο Συστημα

$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ ή $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

Διανυσματικη εξισωση: $\vec{r} - \vec{r_1} = \lambda \vec{a} + \mu(\vec{r_2} - \vec{r_1})$

Παραμετρικη εξισωση:
$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot a_2 + \mu(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot a_3 + \mu(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Αναλυτικη εξισωση:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{σημειο} \\ \rightarrow \text{διανυσμα } 1^{o} \\ \rightarrow \text{διανυσμα } 2^{o} \end{array}$$

$(\vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{a}) = 0$

$(\neq 0)$